ZFCρ热力学论文
III：涨落吸收率η的规范提取与regime分类

Canonical f/r Extraction and Regime Classification of the Fluctuation Absorption Rate η

Han Qin（秦汉）

SAE Research · 2026

摘要

非平衡统计力学缺少一个同时满足无量纲，跨尺度稳定，动力学内生，定量可测这四个条件的标量参数。本文定义了convention-corrected coupling κ，将耗散系统的双通道动力学（驱动通道f与恢复通道r）的补偿程度统一归结为一个不依赖符号约定的标量。在此基础上建立了四种regime的分类：null（κ≈0，f与r独立），absorptive（0<κ<1，部分吸收），overscreening（κ>1，过度补偿），anti-compensatory（κ<0，反向协同）。

我们定义代数延拓量η̄ := 1-κ，它在所有regime中均可报告。涨落吸收率η这一名称仅保留给absorptive regime（0<κ<1），在此regime中η = η̄ = 1-κ具有"每步未被对冲的涨落比例"的明确物理含义。

我们引入了admissible decomposition family的概念：η不追求在任意坐标旋转下的全局唯一性，而是在物理可解释的分解族内寻求可识别性，可重复性，可跨尺度测试性。

τ-selection taxonomy将系统分为两类。通道独立系统（如Ornstein-Uhlenbeck过程和Lindley排队）的f与r是独立随机过程，η̄(τ)在极小τ端可能出现null corner。状态耦合系统（如Brusselator化学振荡和Schlögl双稳态模型）的f与r共享状态变量，η̄(τ)在小τ端直接进入平台。

三个benchmark系统构成一组判别三联组。Ornstein-Uhlenbeck过程（κ≈0，η̄≈1）是null test。Brusselator（κ≈0.8，η≈0.19-0.20）展示了absorptive plateau。Schlögl模型（κ>1，η̄<0全程）展示了overscreening。

Brusselator的η≈0.20与ZFCρ素数步递推中的η≈0.20数值吻合。参数空间扫描表明η不是恒定值而是连续动力学指标：在Brusselator的整个振荡regime内η ∈ [0.14, 0.34]，均值0.20，且η与离Hopf分岔点的距离单调正相关。

我们观察到一个候选统一拟设（candidate unifying ansatz）：η≈0.20可被分解为复合耗散1 - C(1)^{m_eff}，其中C(1)是f通道的逐步自相关，m_eff是有效衰减层数。ZFCρ中C(1) = 0.96, m_eff = 5.47；Brusselator中C(1) = 0.98, m_eff = 11.3。两者的C(1)和m_eff各自不同，但复合值收敛。需要指出的是，Brusselator中的m_eff是从η和C(1)反推的，尚非独立测量，因此这一分解目前是suggestive而非conclusive。η≈0.20是否是某类f/r耦合系统中复合耗散函数的不动点，是一个高优先级的开放问题。

本文给出四项可证伪预测，其中最硬的一项是：在BZ/Oregonator反应的实验数据中，如果合成速率和降解速率可独立测量，η应落在0.14-0.34范围内。

§1 引言：非平衡参数的四条件空位

1.1 问题

平衡统计力学有一套完整的工具箱。配分函数提供了从微观到宏观的精确桥梁，自由能极小化给出了稳态判据，涨落耗散定理在线性响应区给出了输运系数的精确表达式。

一旦离开平衡，这些工具大部分失效。过去三十年最重要的进展是Jarzynski等式和Crooks涨落定理[1,2]，它们在远离平衡的条件下给出了关于功和自由能差的精确恒等式。但恒等式不是动力学理论：它们告诉你"平均而言自由能差是对的"，不告诉你"每一步泄漏多少"。

热力学家手里有许多描述非平衡行为的量。但当我们检查这些量是否同时满足四个操作性条件时，会发现一个空位。

这四个条件是：无量纲（可跨系统比较），跨尺度稳定（在不同粗粒化尺度下给出近似相同的值），动力学内生（来自系统的驱动-响应结构，不是外加的统计量），定量可测（有明确的提取协议和误差估计）。

1.2 已有量的检查

熵产生率$\sigma = dS_i/dt$是最接近的量。它是正定的，动力学内生的，定量可测的。但它有量纲（J/K· s），依赖系统尺寸。一个细胞的σ和一颗恒星的σ无法比较。

Jarzynski耗散功$W_{diss} = W - \Delta F$可以在特定条件下定义无量纲形式，但它描述的是单次过程的路径量，不是系统的内禀动力学参数。

FDR violation和有效温度T_{eff}描述的是系统偏离平衡的程度，但有效温度依赖于所选的观测量[3]，不是系统的内禀性质。

Lyapunov指数λ是无量纲的，跨尺度稳定的，但它测量的是轨道不稳定性（混沌），不是耗散。保守Hamilton系统也可以有正的Lyapunov指数。

Hurst指数H是无量纲的，跨尺度稳定的，但它是统计描述（时间序列自相似性），不是动力学机制的产物。

热力学不确定性关系（TUR）给出了电流涨落的下界[4]，是非平衡统计力学最精确的结果之一。但TUR约束的是单一电流的精度-成本权衡，不是两个独立可观测过程之间的耦合度。

我们还检查了Fano factor，KL散度率（相对熵产生率），Maes的excess entropy production[5]，以及Lecomte等人的dynamical activity[6]。这些量各自满足上述四个条件中的两到三个，但没有一个同时满足全部四个。

量	无量纲	跨尺度稳定	动力学内生	定量可测
σ（熵产率）	×	×		
W_diss（Jarzynski）	×	×	×	
T_eff（FDR violation）	×	×	×	×
λ（Lyapunov）			*	×
H（Hurst）			×	×
TUR Q值		○	○	
η（本文）				

注：*表示Lyapunov指数是几何量而非热力学量。○表示部分满足。本表不是"η是唯一"的claim；η的设计目标是把这四个通常分散在不同指标中的要求压进同一个可测标量。

1.3 本文的贡献

本文提出涨落吸收率η作为填补上述空位的候选量。η的定义基于将系统动力学分解为驱动通道f（forward）和恢复通道r（reset）两个竞争过程。η测量的是r对f的涨落"没有对冲掉"的比例。

η的概念来自Le Chatelier-like的补偿响应思想：系统受到扰动后，会产生部分抵消扰动的响应[7]。η量化了"部分"的程度。但η不是平衡态附近的线性响应系数。η不需要近平衡假设，不需要线性化，不需要Onsager互易关系。η是对Le Chatelier精神的远平衡操作化，不是Le Chatelier原理的定量版本。

本文的贡献有四项：（1）convention-corrected coupling κ和四regime分类；（2）admissible decomposition family的概念；（3）τ-selection taxonomy（通道独立系统 vs 状态耦合系统）；（4）三系统benchmark panel（OU/Brusselator/Schlögl）。

§2 Convention-Corrected Coupling κ与Regime分类

2.1 符号约定与κ的定义

考虑一个耗散系统，其可观测量X的离散化动力学可以写成两个通道的竞争：

$$\Delta X_n = \Delta f_n + s_r \cdot \Delta r_n + \xi_n$$

其中Δf_n是驱动通道在第n步的贡献（如果单独作用，会使系统偏离稳态），Δr_n是恢复通道的贡献（提供恢复力），$s_r \in \{+1, -1\}$是符号约定标志，ξ_n是外部噪声。

不同的文献采用不同的符号约定。在drive-restoration记法中（$\Delta X = \Delta f - \Delta r$），$s_r = -1$。在某些文献中恢复项的负号已经被吸进$\Delta r$的定义里（$\Delta X = \Delta f + \Delta r$），此时$s_r = +1$。

这个符号差异会翻转$\mathrm{Cov}(\Delta f, \Delta r)$的正负号，导致同一个物理系统的$\bar{\eta}$可能被报告为不同的值，仅取决于写法。

为消除这种依赖，我们定义convention-corrected coupling：

$$\kappa := -s_r \cdot \frac{\text{Cov}(\Delta f, \Delta r)}{\text{Var}(\Delta f)}$$

κ的物理含义是：在消除了符号约定的影响之后，恢复通道r对驱动通道f的涨落对冲了多少比例。κ越大，对冲越强。

本文统一采用f-r convention（$\Delta X = \Delta f - \Delta r$），$s_r = -1$。在此约定下，$\mathrm{Cov}(\Delta f, \Delta r) > 0$表示补偿（f升→r跟升→净效果被阻尼），$\kappa = \mathrm{Cov}/\mathrm{Var}(\Delta f)$。

2.2 四个Regime

κ的值域自然地将系统分为四类。

Null regime（$\kappa \approx 0$）：
f和r的涨落几乎无关。恢复通道没有"预测"驱动通道的能力。Ornstein-Uhlenbeck过程在噪声kick与恢复力的分解下属于此类（小τ端外部kick与当前恢复通道近似独立）。

Absorptive regime（$0 < \kappa < 1$）：
恢复通道对冲了驱动通道的部分涨落，但不是全部。系统处于"部分吸收"状态。涨落吸收率$\eta := 1 - \kappa$在此regime中有明确的物理含义：它是每一步中未被对冲的涨落比例。

Overscreening regime（$\kappa > 1$）：
恢复通道的响应超过了驱动通道的涨落。这在数学上完全合法（Cauchy-Schwarz不等式只约束$|\mathrm{Cov}| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(f) \cdot \mathrm{Var}(r)}$，当$\mathrm{Var}(r) > \mathrm{Var}(f)$时比值可以超过1）。物理上，这意味着恢复力不只把系统拉回来，还拉过了头。Schlögl模型在自然分解下全程处于此regime。

Anti-compensatory regime（$\kappa < 0$）：
校正后的耦合为负，意味着f和r不是在补偿而是在协同。这通常指示分解本身有问题（将一个过程错标为"驱动"或"恢复"），或者系统正处于远离稳态的瞬态。

2.3 $\bar{\eta}$与η的三族定义

代数延拓量$\bar{\eta} := 1 - \kappa$在所有regime中均可计算和报告。涨落吸收率η这一名称仅保留给absorptive regime。在null regime中报告$\kappa \approx 0$或$\bar{\eta} \approx 1$；在overscreening regime中报告$\kappa > 1$或$\bar{\eta} < 0$。

在absorptive regime内，定义主量

$$\eta_{r \leftarrow f} := 1 - \kappa = 1 + s_r \cdot \frac{\text{Cov}(\Delta f, \Delta r)}{\text{Var}(\Delta f)}$$

这是r对f的涨落吸收残差。$\eta_{r\leftarrow f} = 0$意味着完美吸收，$\eta_{r\leftarrow f} = 1$意味着完全无吸收。

反向诊断量

$$\eta_{f \leftarrow r} := 1 + s_r \cdot \frac{\text{Cov}(\Delta f, \Delta r)}{\text{Var}(\Delta r)}$$

测量f对r的涨落对冲。在大多数物理系统中$\eta_{r\leftarrow f} \neq \eta_{f\leftarrow r}$，因为f和r的方差通常不等。两者的差异本身是有信息的：差异大说明f和r的"力量"悬殊。

对称耦合量

$$\eta_{\text{sym}} := 1 - |\text{Corr}(\Delta f, \Delta r)|$$

不依赖于哪个通道做分母，测量的是f和r的总耦合残差。η_{sym}适合在不确定哪个通道是"驱动"哪个是"恢复"的情况下使用。

2.4 与Thermo I的兼容性

Thermo I（DOI: 10.5281/zenodo.19310282）定义的η = 1 - |Cov(Δf, Δr)|/Var(Δf)使用了绝对值。在Thermo I的DP递推和Lindley排队验证中，Cov始终为负（在f+r convention下），所以|Cov| = -Cov，Thermo I的η和本文的η_{r←f}数值一致。

本文的κ框架是Thermo I定义的推广，而非替代。

2.5 Protocol A：规范提取六步

以下是η的完整提取协议。

Step 1（选定observable）。 选定系统的可观测量X(t)。

Step 2（声明f/r分解与convention）。 在admissible family（§3）内选定f/r分解，声明s_r的值。如果模型已知，从方程直接读取f和r（§3.4）。如果模型未知，使用Protocol B（附录A）作为启发式代理。

Step 3（扫描τ）。 生成候选τ列表（如对数间隔序列）。对每个τ，将f(t)和r(t)在τ窗口内积分得到Δf_n和Δr_n序列。实际流程是：先给候选分解，再扫τ，再比较平台宽度与因果可解释性。

Step 4（计算）。 对每个τ，计算κ, η⁻, η_{r←f}, η_{f←r}, η_sym。报告Cov的原始符号。

Step 5（判定regime）。 根据κ的值判定regime（null/absorptive/overscreening/anti-compensatory）。仅在absorptive regime中将η⁻解释为涨落吸收率η。

Step 6（报告稳定性）。 对canonical τ（§4.2），计算η⁻(τ), η⁻(2τ), η⁻(4τ)，报告bootstrap 95% CI和稳定性等级（§4.4）。

---

§3 Admissible Decomposition Family

3.1 η⁻不是坐标不变量

给定一个系统的f和r通道，任何线性变换

$$f' = \cos\theta \cdot f + \sin\theta \cdot r, \quad r' = -\sin\theta \cdot f + \cos\theta \cdot r$$

都定义了一组新的"通道"。在不同的θ下计算η⁻，一般会得到不同的值。

我们在Brusselator上的数值实验证实了这一点（§5.2.3）。自然分解（θ = 0°）给出η ≈ 0.19。旋转到θ = 90° 给出η⁻ ≈ 0.006。旋转到某些角度给出η⁻ < 0。

这意味着η⁻不是任意坐标旋转下的不变量。

3.2 Protocol-defined quantity

η不追求在任意basis rotation下的全局唯一性。η是一个protocol-defined quantity，其值取决于三个选择：（1）f/r分解；（2）时间尺度τ；（3）统计估计方法。

这和实验物理的许多可观测量类似。一个晶体的弹性模量取决于你选择的应力方向。一个流体的粘度取决于剪切速率。这些量不是"任意的"：它们在给定协议下可重复，可跨实验室比较，可用来区分不同材料。但它们确实依赖于测量协议。

η的情况完全一样。我们不解决arbitrary decompositions的唯一性；我们只解决natural, physically interpretable decompositions的可识别性。

3.3 Admissible family的定义

一个f/r分解是admissible的，如果满足以下三个条件：

（i）物理可解释性。 f和r可以被独立地赋予物理含义。例如，在化学反应中f = 合成速率，r = 降解速率；在排队系统中f = 到达，r = 服务。纯数学旋转（如θ = 45° 的混合基底）通常不满足此条件。

（ii）因果方向一致性。 在$\kappa>0$的regime中，f和r的角色与动力学方程中的驱动/恢复角色一致。对通道独立系统，这意味着时间滞后分析显示f不系统性滞后于r。对状态耦合系统（f和r共享状态变量），f和r的因果关系通常是零滞后的结构耦合，此时因果方向由方程中的角色定义（如合成=f，降解=r），而非时间领先/滞后。

（iii）τ-稳定性。 在canonical τ（§4定义）的邻域内，$\bar{\eta}(\tau)$处于稳定平台（变化率满足跨尺度稳定性判据，§4.4）。

在admissible family内，不同的分解可能给出不同的η值。但实践中，物理自然的分解往往只有一个或少数几个。在Brusselator中，$f = a + x^2y$（合成），$r = (b+1)x$（降解）是唯一的自然分解。在Lindley排队中，f = 到达间隔，r = 服务时间，也是唯一的。

3.4 从方程读取 vs 从数据推断

当系统的动力学方程已知时（模型已知情况），f和r可以直接从方程中读取。这是最简单也最可靠的情况。Brusselator就是这种情况。

当只有观测数据而无模型时（模型未知情况），需要从数据中推断f和r。这是一个更困难的问题，在很多情况下需要额外假设。本文的Protocol B（附录A）提供了一种启发式方法，但其可靠性低于模型已知的情况。

---

§4 τ-Selection Taxonomy

4.1 两类系统

数值实验揭示了一个此前未被讨论的根本区分。

通道独立系统。
f和r是两个独立的随机过程，通过系统状态间接影响彼此但不共享动力学变量。Lindley排队（f = 到达间隔，r = 服务时间，两者独立同分布）和Ornstein-Uhlenbeck过程（小τ端外部噪声kick与当前恢复通道近似独立）属于此类。

在通道独立系统中，f和r在极短时间尺度上的协方差由外部噪声主导。当$\tau \to 0$时，$\mathrm{Cov}(\Delta f, \Delta r)$可能趋向零（因为f和r在瞬时尺度上无因果关联），$\bar{\eta}$趋向1。这是under-resolved区域。

状态耦合系统。
f和r共享状态变量，一个通道的瞬时值直接依赖另一个通道正在操作的同一个变量。Brusselator（$f = a + x^2y$，$r = (b+1)x$，两者都是x的函数）和Schlögl模型（$f = \mu x + a$，$r = x^3$，同样共享x）属于此类。

在状态耦合系统中，f和r的耦合是确定性结构的产物，不可被随机噪声稀释。即使在极短时间尺度上，$\mathrm{Cov}(\Delta f, \Delta r)$仍然由f和r对共享状态变量的确定性依赖主导。$\bar{\eta}(\tau)$在小τ端直接进入平台，不经过under-resolved区。

4.2 Canonical τ的定义

canonical τ是最小的同时满足以下两个条件的时间尺度：

因果可解释性。
对通道独立系统，在此τ下时间滞后分析显示f不系统性滞后于r，且κ的符号在连续若干步中保持稳定。对状态耦合系统，允许零滞后结构耦合；要求f和r的分解与方程中的驱动/恢复角色一致。

平台稳定性。 $\bar{\eta}(\tau), \bar{\eta}(2\tau), \bar{\eta}(4\tau)$满足跨尺度稳定性判据（§4.4）。

在通道独立系统中，canonical τ通常在系统弛豫时间$\tau_relax = 1/|\lambda|$附近（λ是线性化Jacobian的主特征值）。在其下方是under-resolved区，在其上方是over-smoothed区。

在状态耦合系统中，canonical τ可以远小于τ_relax。Brusselator的$\tau_relax \approx 2$（从Jacobian特征值$0.5 \pm 0.866i$），但η的平台从$\tau \approx 0.01$就开始了。canonical τ在这里是由数值分辨率和数据量决定的，不是由系统动力学决定的。

4.3 两种$\bar{\eta}(\tau)$曲线

通道独立系统的$\bar{\eta}(\tau)$呈现三区域结构：under-resolved区（$\bar{\eta}$偏高，趋向1）→ canonical平台 → over-smoothed区（$\bar{\eta}$趋向渐近值）。Lindley M/M/1排队的$\bar{\eta}(\tau)$曲线应该展示这种形态。

状态耦合系统的η¯(τ)呈现两区域结构：平台（从极小τ开始）→ 单调下降（趋向0或负值）。Brusselator在σ = 0.1时，η¯从τ = 0.01处的0.192单调下降到τ = 100时的-0.05。没有under-resolved区。

4.4 跨尺度稳定性的两层判据

统计层。 在τ, 2τ, 4τ三个尺度上分别计算η¯及其bootstrap 95%置信区间。如果三个置信区间互相重叠，通过统计层。

效应层。 计算三个η¯值之间的最大相对漂移Δ = max|η¯(kτ) - η¯(τ)|/|η¯(τ)|。分四级：

- Δ < 10%：rigid
- 10% ⩽ Δ < 15%：stable
- 15% ⩽ Δ < 20%：provisionally stable
- Δ ⩾ 20%：scale-drifting

报告η¯时必须同时报告稳定性等级。

---

§5 Benchmark Panel

5.1 实验设计

我们在三个系统上测试了上述框架。三个系统的动力学方程已知（模型已知情况），f/r分解从方程直接读取。

系统	动力学	f	r	预期regime
Ornstein-Uhlenbeck	dx = -γx dt + σdW	σξ（噪声kick）	γx（恢复力）	null
Brusselator	dx/dt = a+x²y-(b+1)x	a+x²y（合成）	(b+1)x（降解）	absorptive
Schlögl	dx/dt = -x³+μx+a+σξ	μx+a（线性驱动）	x³（立方恢复）	overscreening

Brusselator是理论上最经典的化学振荡模型（Prigogine 1968）。实验上最标准、最广泛验证的是Belousov-Zhabotinsky反应及其Oregonator简化模型。

所有系统使用Euler-Maruyama离散化。Brusselator：dt = 0.001, T = 5000（500万步）；OU：dt = 0.001, T = 5000；Schlögl：dt = 0.001, T = 2000。前10%数据作为burn-in丢弃。η¯的统计误差通过对Δf和Δr序列做block bootstrap（block size = 50个τ窗口）估计。每个系统跑多组噪声强度以检验η对噪声的敏感性。符号约定统一采用f-r convention（ΔX = Δf - Δr），s_r = -1。

5.2 结果

5.2.1 Ornstein-Uhlenbeck：null test

参数：γ ∈ {0.5, 1.0, 5.0}，σ = 1.0，T = 5000。

γ	κ(τ=0.01)	η¯(τ=0.01)	η¯(τ=0.1)	η¯(τ=1.0)
0.5	0.000	1.000	0.996	0.975
1.0	0.000	1.000	0.994	0.941
5.0	0.002	0.998	0.998	0.934

κ全程接近0，η¯全程接近1。噪声kick（f）和恢复力（r = γx）之间几乎无协方差。协议正确地识别了null regime。

这是η的零检验。如果κ在f和r独立时也报告出≈0.8，那协议就有系统性偏差。OU的κ≈0证明没有。

5.2.2 Brusselator：absorptive plateau

参数：a = 1, b = 3（振荡regime，b > 1+a² = 2），σ ∈ {0.1, 0.5, 1.0, 3.0}，T = 500-5000。

σ	η(τ=0.01)	η(τ=0.1)	η(τ=1.0)	η(τ=10.0)
0.1	0.192	0.189	0.109	0.080
0.5	0.174	0.165	0.058	-0.048
1.0	0.200	0.177	0.042	-0.029
3.0	0.432	0.241	0.017	-0.026

三个关键观测：

第一，在σ = 0.1到1.0的范围内，小τ端（τ ⩽ 0.1）η稳定在0.17-0.20。σ = 1.0时η(τ=0.001) = 0.200。η的值来自f和r的确定性耦合结构（两者都是x的函数），不来自噪声的统计性质。

第二，η¯(τ)从小τ端的平台单调下降到大τ端的0附近（甚至变负，进入overscreening regime）。没有under-resolved区。这是因为f = a+x²y和r = (b+1)x共享状态变量x，耦合在所有时间尺度上存在。

第三，σ = 3.0（极强噪声，σ/x* = 3.0）时小τ端η上升到0.43。噪声开始部分破坏f和r的确定性耦合。但即使在这种极端条件下，η(τ=0.1) = 0.24仍然在absorptive regime内。

η_{r←f}和η_{f←r}的不对称度很大：在τ = 0.01处，η_{r←f} ≈ 0.192而η_{f←r} ≈ 0.002。这两个量的差异需要仔细解读。κ_{r←f} = Cov/Var(f) ≈ 0.808，而κ_{f←r} = Cov/Var(r) ≈ 0.998。后者接近1是因为在Brusselator中Cov和Var(r)数值接近（两者都由x的大幅振荡主导），而Var(f)较小（a+x²y中a提供了稳定的偏移基线）。这意味着从r的视角看，f几乎完美预测了r的涨落（κ_{f←r}≈1），但从f的视角看，r只对冲了约80%（κ_{r←f}≈0.8）。不对称度反映的是两通道方差的比值，不是耦合强度的方向性。

5.2.3 Brusselator：f/r旋转实验

在比较尺度τ = τ_relax ≈ 2.0处（此处选择τ_relax是为了在所有旋转角上获得足够的统计样本，它不是canonical τ），我们将f和r做线性旋转（§3.1），在0°到180°之间扫描η¯。

自然分解（θ = 0°）给出η¯ = 0.062。旋转到θ = 45°时η¯ = 0.985。旋转到θ = 90°（f和r互换）时η¯ = 0.006。旋转到θ ≈ 142.5°时η¯取到最小值约-2.7（overscreening regime）。

这证实了§3.1的论断：η¯不是旋转不变量。自然分解（合成/降解）在所有admissible分解中给出了一个处于absorptive regime的值。非物理的旋转分解要么给出接近1的值（null-like），要么给出负值（overscreening-like）。

5.2.4 Schlögl：overscreening

参数：μ = 1.0, a = 0.5（单稳态）和μ = 2.5, a = 0.0（近分岔），σ ∈ {0.1, 0.5, 1.0}，T = 2000。

在所有参数组合和所有τ下，η¯均为负值。

(μ, a)	σ	η¯(τ=0.01)	η¯(τ=1.0)	η¯(τ=10.0)
(1.0, 0.5)	0.1	-3.25	-3.24	-3.23
(1.0, 0.5)	0.5	-2.27	-1.84	-0.96
(1.0, 0.5)	1.0	-0.95	-0.74	-0.63
(2.5, 0.0)	0.1	-2.00	-1.99	-1.99
(2.5, 0.0)	1.0	-0.09	-0.04	-0.02

κ > 1全程成立。恢复力x³远强于线性驱动μx+a，导致Var(r) >> Var(f)且Cov很大。

物理含义：Schlögl模型是过度阻尼的非平衡系统。恢复过程不只吸收了驱动的涨落，还"拉过了头"。这和平衡态热力学中的过阻尼（overdamped）是同一类现象的非平衡版本。

值得注意的是，当噪声增大（σ = 1.0）且系统接近分岔点（μ = 2.5）时，η¯从-2.0上升到-0.02，接近null regime。这可能反映了分岔附近恢复力变弱（线性化Jacobian的特征值接近零）。

5.3 η≈0.20：一个recurrent absorptive window

Brusselator在自然f/r分解下的η≈0.19-0.20，与此前在完全不同领域中观测到的值吻合：

系统	领域	f/r分解	η	来源
ZFCρ DP递推	数论	加法步/乘法屏蔽	0.10-0.31（中位数≈0.20）	Thermo I
Lindley M/M/1	排队论	到达/服务	≈0.15	Thermo I
Brusselator	化学动力学	合成/降解	0.19-0.20	本文

ZFCρ和Brusselator是数学结构，物理领域，动力学方程完全不同的系统。前者是定义在素数上的整数值递推，后者是连续状态空间上的非线性微分方程。两者唯一的共同点是：都是状态耦合的双通道耗散系统，f和r共享状态变量。

我们将此现象报告为state-coupled two-channel系统中一个可重复出现的中等吸收窗口（recurrent absorptive window）。这不是η本身的普适性claim（Schlögl的$\bar{\eta} < 0$和OU的$\bar{\eta} \approx 1$已经否定了这一点）。这是一种recurrent regime：在满足特定结构条件（状态耦合，双通道，恢复力非过度主导）的系统中，η倾向于落在0.15-0.25附近。

需要校准这个claim的强度。η ≈ 0.20是振荡regime均值（§5.4），不是恒定值。完整的claim是：在状态耦合双通道振荡系统中，η的中心趋势在0.15-0.25之间，参数范围在0.14-0.34之间。三个独立系统（ZFCρ，Lindley，Brusselator）的数据支持中心趋势claim，但样本量不足以排除0.15-0.25之外的中心趋势值。

此外，§7.2将表明，η ≈ 0.20在旋转实验中具有一种特殊性：它是唯一一个落在recurrent absorptive window内的自然分解值，这和候选统一拟设（§5.5）直接相连。

5.4 参数空间扫描：η作为连续动力学指标

为检验η≈0.20的稳健性，我们扫描了Brusselator的完整参数空间。a ∈ {0.5, 1.0, 1.5, 2.0}，b从阻尼regime（$b < 1+a^2$）扫到深振荡regime（$b >> 1+a^2$），$\sigma = 0.3$，$\tau = 0.05$。

代表性数据点：

a	b	regime	η
0.5	0.75	阻尼	0.006
0.5	1.35	振荡	0.148
0.5	1.75	振荡	0.207
0.5	6.25	振荡	0.342
1.0	1.90	阻尼	0.124
1.0	2.10	振荡	0.140
1.0	3.00	振荡	0.206
1.0	7.00	振荡	0.260
2.0	4.90	阻尼	0.148
2.0	5.10	振荡	0.155
2.0	7.00	振荡	0.192

（完整20组数据见补充材料。）

三个关键观测：

第一，η在分岔点$b = 1+a^2$附近连续变化，不是跳跃。阻尼regime均值$\bar{\eta} = 0.103$，振荡regime均值η = 0.203。分岔点不是η的奇异点，而是$\bar{\eta}$从低值区到中值区的平滑过渡。

第二，振荡regime内η的范围是0.14-0.34。η不是恒定值。它随系统远离分岔点（(b-b_crit)/b_crit增大）而单调增大。η ≈ 0.20出现在"中等偏离"处。

第三，跨所有a值，振荡regime的η均值都落在0.20附近（a=0.5: 0.25, a=1.0: 0.21, a=1.5: 0.19, a=2.0: 0.18）。a的影响弱于b的影响。

η因此不是一个普适常数，而是一个连续动力学指标。它随系统远离分岔点而增大，在中等偏离处取值约0.2。这比"η恒等于0.2"更有物理内容。

5.5 复合耗散结构：候选统一拟设

Thermo II（DOI: 10.5281/zenodo.19511064）给出η ≈ 0.20 = 1 - C(1)^{m_eff}，其中C(1) ≈ 0.96是ZFCρ中的层间继承率，m_eff ≈ 5.47是有效层数。

如果这个复合耗散机制是跨系统的，Brusselator的f通道时间序列也应该可以被分解为类似的指数衰减结构。我们在τ = 0.05的f通道积分序列上计算了逐步自相关函数。

lag k	ACF_f(k)	ACF_f(k)/ACF_f(k-1)
0	1.000	—
1	0.982	0.982
2	0.938	0.956
3	0.883	0.942
5	0.770	—
10	0.525	—
15	0.324	—
20	0.189	—

f通道的lag-1自相关C(1) = 0.982。ACF(k)/ACF(k-1)不严格恒定（从0.982逐步下降到~0.88），说明Brusselator的f通道自相关衰减不是纯指数的，但作为一阶近似可以使用C(1)^k。

如果假设η = 1 - C(1)^{m_eff}：

系统	C(1)	m_eff	1 - C(1)^{m_eff}
ZFCρ	0.96	5.47	0.200
Brusselator f-channel	0.982	11.3	0.190

C(1)和m_eff各自不同，但复合值接近。不同系统通过不同的路径到达类似的η：ZFCρ走的是"每步继承96%，5.5步一个周期"，Brusselator走的是"每步继承98%，11步一个周期"。

需要标明此分析的局限性。Brusselator中的m_eff = 11.3是从η = 0.19和C(1) = 0.982反推的（m_eff = ln(1-η)/ln(C(1))），不是独立测量。在ZFCρ中，m_eff = 5.47可以从G_j(M)振荡的周期独立确认，但在Brusselator中目前没有m_eff的独立测量方法。因此，1 - C(1)^{m_eff} ≈ η在Brusselator中是一个post hoc factorization，不是独立验证。

此外，ZFCρ中的C(1)是同层prime-index的空间自相关，Brusselator中的C(1)是时间序列的lag-1 ACF。两者可以类比为"first-step retention"，但不是同一种可观测量。

我们将此分析报告为一个候选统一拟设（candidate unifying ansatz），而非已确立的机制。它的suggestive价值在于：两个完全不同的系统通过不同的(C(1), m_eff)路径到达同一个η，暗示可能存在某种约束使1 - C(1)^{m_eff}收敛。但这一暗示目前是suggestive而非conclusive。

5.6 非平凡预测

基于上述实验结果，我们提出以下可证伪预测：

预测P1（参数空间预测）。 对任意状态耦合双通道振荡系统，在自然f/r分解下，η(小τ)应满足：

（i）η在振荡regime内落在0.14-0.34范围；

（ii）η与系统离Hopf分岔点的参数距离单调正相关；

（iii）在分岔点处η连续（无跳跃），从阻尼regime的低值（η̄ < 0.15）平滑过渡到振荡regime的中值（η ≈ 0.20）。

该预测可在Van der Pol振荡器，Lotka-Volterra捕食模型，FitzHugh-Nagumo神经模型等标准系统中立刻检验。任何一个系统在自然f/r分解下如果η落在0.14-0.34范围之外，即构成对P1的反例。

预测P2（复合耗散拟设）。 对任意给出η ≈

0.2的状态耦合系统，其f通道（或r通道）的逐步自相关应满足近似指数衰减$ACF(k) \approx C(1)^k$，使得$1 - C(1)^{m_eff} \approx \eta$。

C(1)和m_eff各自随系统而变，但复合值$1 - C(1)^{m_eff}$收敛到0.15-0.25。如果在某个系统中ACF(k)衰减不满足指数形式（如幂律衰减），或者复合值显著偏离η（如偏差>50%），即构成对P2的反例。

预测P3（实验预测，最硬）。
在Belousov-Zhabotinsky反应或其Oregonator模型的实验数据中，如果合成速率和降解速率可以被独立测量（通过同位素标记或快速混合实验），η应落在absorptive regime内，值在0.14-0.34范围。

该预测是纯实验性的，可以在标准化学动力学实验室中检验。

预测P4（$\bar{\eta}(\tau)$形态预测耦合类型）。
给定一个未知系统的时间序列及其f/r分解，$\bar{\eta}(\tau)$曲线的形态可以诊断f/r耦合类型：

（i）如果$\bar{\eta}(\tau)$在小τ端直接进入平台（无上升段），系统是状态耦合的；

（ii）如果$\bar{\eta}(\tau)$在小τ端从高值（$\bar{\eta} \to 1$）下降到平台，系统是通道独立的。

该预测可通过在一个已知耦合类型的新系统上盲测$\bar{\eta}(\tau)$来检验。

§6 与已有框架的接口

6.1 与三种熵产分解的关系

非平衡统计力学已有三种成熟的分解框架。Onsager的力-流分解[9]处理近平衡线性响应区域，将熵产写成广义力和广义流的乘积。Hatano-Sasa的housekeeping/excess分解[10]将熵产分为维持稳态的housekeeping部分和偏离稳态的excess部分。Esposito-Van den Broeck的adiabatic/non-adiabatic分解[11]进一步细化了这种区分。

f/r分解与这三种分解是正交的，可以互补。关键区别在于：f/r分解作用于动力学过程本身（哪些过程在驱动，哪些在恢复），它们分解的是熵产（总耗散的不同来源）。两种分解可以同时进行：先做f/r分解得到η，再用Hatano-Sasa分解追溯η的物理来源中哪些是housekeeping贡献，哪些是excess贡献。

κ和Onsager矩阵L的off-diagonal元素在都度量"两个过程之间的互耦强度"这一点上可以类比。在近平衡线性响应区域，两者都量化"一个过程对另一个过程的响应"。但κ是一个不需要近平衡假设和线性化的操作性定义，而Onsager系数是线性响应理论的产物。两者不是同一个对象。

6.2 与信息论量的关系

$\kappa = Cov(\Delta f, \Delta r)/Var(\Delta f)$在统计学中是f对r做线性回归时的回归斜率$\beta_{r\sim f}$。注意这不是决定系数$R^2$（后者等于$Corr(\Delta f, \Delta r)^2$）。

$\eta_{r\leftarrow f} = 1 - \kappa$因此是"1减去回归斜率"，描述的是一个有方向的线性耦合残差：r的涨落中有多少比例不能被f的涨落线性预测。$\eta_{sym} = 1 - |Corr|$描述的是对称耦合残差。

这些量和Granger因果性[12]的文献有概念上的亲缘关系：Granger因果性也测量"一个过程的历史对预测另一个过程有多大帮助"。但$\eta_{r\leftarrow f}$是同步的（同一个τ窗口内的Cov），Granger因果性是跨时间的（过去的f预测未来的r）。两者度量不同方面的过程间依赖。

Sagawa-Ueda信息热力学框架[14]中的mutual information是测量装置和系统之间的互信息，用来修正Landauer bound。f/r分解中的耦合量度的是系统内部两个过程之间的关联。形式上都涉及两个随机变量之间的统计依赖，但物理语境不同（外部测量 vs 内部耦合）。

6.3 与TUR的互补性

热力学不确定性关系（TUR）给出 $(\Delta J)^2/J^2 \geq 2k\_B T/\sigma\_tot$ [4]。这是一个不等式，约束的是单一电流J的涨落-均值比和总熵产σ_{tot}之间的权衡。

η和TUR不是推导关系，是互补关系。TUR约束电流精度的下限。η量化驱动-响应解耦的程度。TUR中没有"两个独立可观测过程"的分解，它处理的是一个净电流。

两者在定性方向上一致：在f/r对称性破缺很大的系统中，TUR的bound应该松（因为熵产大），η也应该大（因为f和r解耦程度高）。但这种一致性是定性的，不存在从TUR推出η的数学路径。

§7 开放问题

7.1 η≈0.20的结构性解释

ZFCρ和Brusselator在完全不同的动力学方程下给出η≈0.20。§5.5提出了一个候选统一拟设：1 - C(1)^{m_eff}在两个系统中收敛到同一个值，但C(1)和m_eff各自不同。

关键的开放问题是：什么数学结构（如果存在的话）保证了1 - C(1)^{m_eff}在不同系统中收敛？一个可能的方向是将C(1)和m_eff视为一个二维空间中的点，寻找使1 - C(1)^m = const的等高线。在这条等高线上，C(1)越大（每步继承率越高），m_eff必须越大（有效层数越多）来维持相同的复合耗散率。这是一种"补偿"：系统可以通过不同的C(1)-m_eff组合到达相同的η。

但这只是描述了现象，没有解释为什么等高线是η ≈ 0.2而不是η ≈ 0.1或η ≈ 0.5。回答这个问题可能需要从f/r耦合的不动点方程出发。此外，如§5.5所述，Brusselator中m_eff目前是反推的，尚需找到独立测量方法。

更多系统的数据是回答此问题的前提。目前三个系统加上参数扫描的结果是suggestive的，但完全严格的证明仍然是开放的。

7.2 自然分解的特殊性

η̄在f/r旋转下不是不变量（§3.1）。一个自然的猜想是：canonical分解是使η̄(τ)平台最宽的分解（最大尺度不变性原理）。

我们在Brusselator上数值验证了这个猜想。对每个旋转角θ（0°到180°，步长10°），计算η̄(τ)在25个对数间隔τ值上的平台宽度（连续变化<10%的τ点数）。

结果：猜想不成立。θ = 50°-100°的平台最宽（25/25个τ点全稳定），但η̄ > 1，不在absorptive regime内。即使只看absorptive regime内的分解，θ = 30°（平台宽度16，η̄ ≈ 0.81）也比θ = 0°（平台宽度7，η ≈ 0.20）更宽。

但自然分解有一个不同的特殊性：它是唯一一个η落在recurrent absorptive window（0.15-0.25）内的分解。θ = 10°给η̄ = 0.44，θ = 20°给η̄ = 0.63，θ = 30°给η̄ = 0.81。只有θ = 0°（和等价的θ = 180°）给η ≈ 0.20。

这个特殊性和§5.5的候选统一拟设相连：只有自然分解给出的f通道时间序列呈现近似指数衰减的自相关结构，使得1 - C(1)^{m_eff}落在≈0.20的等高线上。旋转后的分解破坏了这个结构。

因此，自然分解的canonical地位不来自某种最优性原理（如最宽平台或最小η），而来自它与底层复合耗散结构的吻合。这是一个比变分原理更深的判据，但也更难形式化。它的完全理解可能需要弄清楚为什么1 - C(1)^{m_eff}在状态耦合系统中收敛——这是§7.1的问题。

7.3 开放量子系统

开放量子系统的Lindblad主方程 dρ/dt = -i[H, ρ] + Σ(LρL† - ...) 有一个自然的f/r分解：f = -i[H, ρ]（酉演化），r = Σ(LρL† - ...)（Lindblad耗散算子）。退相干时间是自然的τ。

这个方向目前缺少数值验证。如果在一个具体的开放量子系统（如driven-dissipative cavity）中测量η̄，结果是否也落在absorptive regime？

7.4 η和Jacobian特征结构的关系

Brusselator的η≈0.19是否和Jacobian特征值（0.5 ± 0.866i）之间有简单的解析关系？目前的数值实验无法给出闭合公式（非线性项x^2y阻碍了线性化的完全消除），但η和阻尼率Re(λ)/|λ|之间的关联值得进一步探索。

7.5 Housekeeping entropy和η的定量关系

在f/r耦合系统中，耦合越强，维持f-r协调的代价（housekeeping entropy production）应该越大，κ应该越大，η应该越小。这是一个可在Brusselator中直接测试的预测。如果成立，η和Hatano-Sasa框架之间就有了定量接口。

参考文献

[1] Jarzynski, C. Phys. Rev. Lett. 78, 2690 (1997). [2] Crooks, G. E. Phys. Rev. E 60, 2721 (1999). [3] Cugliandolo, L. F., Kurchan, J. & Peliti, L. Phys. Rev. E 55, 3898 (1997). [4] Barato, A. C. & Seifert, U. Phys. Rev. Lett. 114, 158101 (2015). [5] Maes, C. J. Stat. Phys. 95, 367 (1999). [6] Lecomte, V., Appert-Rolland, C. & van Wijland, F. J. Stat. Phys. 127, 51 (2007). [7] Shpielberg, O. et al. Phys. Rev. Lett. 116, 240603 (2016). [8] Feigenbaum, M. J. J. Stat. Phys. 19, 25 (1978). [9] Onsager, L. Phys. Rev. 37, 405 (1931). [10] Hatano, T. & Sasa, S. Phys. Rev. Lett. 86, 3463 (2001). [11] Esposito, M. & Van den Broeck, C. Phys. Rev. Lett. 104, 090601 (2010). [12] Granger, C. W. J. Econometrica 37, 424 (1969). [13] Schreiber, T. Phys. Rev. Lett. 85, 461 (2000). [14] Sagawa, T. & Ueda, M. Phys. Rev. Lett. 104, 090602 (2010).

附录A：Protocol B（单通道启发式代理）

当只有一条时间序列X(t)而无法独立观测f和r时，可利用吸引子结构做条件分解。

Step 1：估计吸引子X*（固定点或极限环中心线）。

Step 2：定义偏差δ_n = X(nτ) - X*。

Step 3：条件分解。当|δ_{n+1}| > |δ_n|时（远离吸引子），ΔX_n归入f。当|δ_{n+1}| < |δ_n|时（趋向吸引子），ΔX_n归入r。

Step 4：计算κ和η¯。

局限声明。 Protocol B是启发式代理（heuristic proxy），不是精确协议。它假设f和r在时间上交替主导（不是同时作用），对强耦合系统这个假设会失效。Protocol B给出的η¯不能被视为Protocol A的无偏估计。

特别是对于存在极限环（limit cycle）的持续振荡系统，简单的径向距离测度|δ_{n+1}| |δ_n|会失效，因为系统主要沿着等势流形进行相位演化，而非径向发散/收敛。对于此类极限环振荡器，Protocol B需要被升级为相空间中的角度/相位切分（phase-angle splitting），或直接依赖Protocol A的多变量方程提取。

理论注脚。 Takens嵌入定理[15]表明，单一时间序列在embedding dimension足够大时包含了原始动力系统的拓扑信息。Protocol B可以被视为Takens重构的一阶近似。但Takens定理的条件（足够的embedding dimension，低噪声，密采样）在实际非平衡系统中经常不满足。

[15] Takens, F. In: Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Math. 898, 366 (1981).

附录B：η¯(τ)双曲线图

（此附录在正式版中应包含两幅图。）

图B1：通道独立系统（Lindley M/M/1类）。η¯(τ)呈三区域结构。under-resolved区（τ << τ_relax，η¯偏高）→ canonical平台 → over-smoothed区（τ >> τ_relax，η¯趋向渐近值）。

图B2：状态耦合系统（Brusselator类）。η¯(τ)呈两区域结构。平台（从极小τ开始，η≈0.19）→ 单调下降（大τ端趋向0或负值）。无under-resolved区。

两幅图的对比直观地展示了§4.1的核心论点：η¯(τ)的形态取决于f/r的耦合类型，不是η本身的普适性质。